# Desviación estándar, la puntuación-z y la curva normal

## Por Tevni Grajales G.

---

### La desviación estándar

La desviación estándar se basa en la media como punto de referencia y procede a tomar en consideración la magnitud y la ubicación de cada puntuación. Cuán desviado o separado está cada puntuación respecto a la media.

Supongamos que diez personas viven en los alrededores de la catedral en la ciudad. Cada una de ellas dista cierta cantidad de metros de la puerta principal de la iglesia. Ahora podemos preguntarnos cuál es la distancia media que separa a estas diez personas de la entrada principal del templo? Lo que podemos hacer es sumar cada una de las distancias que los separan de la iglesia y luego dividir ese total entre diez.

Este ejemplo así descrito es extremadamente simple. Suponga que el punto ubicado en la entrada del templo es exactamente el lugar que representa el centro medio de la ubicación de las diez personas, es decir que algunos están en una dirección y otros en otra. Lo que significa que si tomamos en cuenta no solo la magnitud de la distancia sino su dirección en la que se encuentra tendríamos valores negativos y positivos los cuales al sumarlos (si el punto central es el correcto) dan como resultado cero.

Esa distancia entre cada sujeto y la entrada del templo representa lo que conocemos como desviación de la media o puntuación de la desviación. Ese es el elemento fundamental de la desviación estándar y consiste en la puntuación de la desviación lo cual es representado por una x minúscula. La puntuación de la desviación es la diferencia que existe entre una puntuación en bruto (la ubicación de cada persona) y la media (la entrada del templo). Se obtiene restando el valor que corresponde a la media de la distribución, del valor de la puntuación que en particular. Esto significa que si la puntuación en bruto que se está considerando tiene un valor menor al de la media, su correspondiente puntuación de la desviación (x) será un valor negativo y si su valor es por encima de la media la diferencia será un valor positivo. Si sumamos algebraicamente todas las puntuaciones de las desviaciones en una distribución, encontraremos que el resultado siempre será 0 (cero). Por ello es que para calcular un índice de variabilidad, se elevan las puntuaciones de la desviación al cuadrado y al sumar los cuadrados de las puntuaciones y dividirlos entre el total de casos, tenemos la varianza (la media de los cuadrados de las puntuaciones de la desviación). De manera que la varianza se expresa necesariamente en unidades que son cuadrados de las unidades iniciales de medida. Para volver a los valores originales se procede a obtener la raíz cuadrada de la varianza para tener la desviación estándar.

| | X | | | x | | $x^2$ | | | | X | | $X^2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | | | +3 | | +9 | | | | 9 | | 81 | |
| | 8 | | | +2 | | +4 | | | | 8 | | 64 | |
| | 7 | | | +1 | | +1 | | | | 7 | | 49 | |
| | 6 | | | 0 | | 0 | | | | 6 | | 36 | |
| | 5 | | | -1 | | +1 | | | | 5 | | 25 | |
| | 4 | | | -2 | | +4 | | | | 4 | | 16 | |
| | 3 | | | -3 | | +9 | | | | 3 | | 9 | |
| $\Sigma X =$ | 42 | = 6 | | | | 28 | $= \Sigma x^2$ | | $\Sigma X =$ | 42 | | 280 | $=\Sigma X^2$ |

$$\sigma = \sqrt{28 / 7} = \sqrt{4} = 2$$

## Las puntuaciones estándar

Una vez determinada una distribución, su media y desviación estándar podemos hacer algunas comparaciones entre los casos o sujetos que constituyen la distribución. Pero no es posible hacer comparaciones con otras distribuciones a menos que se trate de la misma escala de medición, con la misma media y la misma desviación estándar. ¿Cómo comparar la calificación obtenida por un alumno en el examen de matemática con la que obtuvo en el de historia? Lo que hacemos es establecer una medida común, lo que se ha dado por llamar medidas de puntuaciones estándar. Una de las más usadas es la puntuación-z, que se define como la distancia de una puntuación respecto a su media, según una medición hecha en unidades de desviación estándar. Donde $z = x/\sigma$ . Esto nos da una distribución cuya media es 0 su desviación estándar es 1.

Supongamos que la puntuación de un estudiante en una prueba de estadística es de 72, donde la media de la distribución es 78 y la desviación estándar es 12. Supongamos asimismo que alcanza una puntuación de 48 en una prueba de matemática donde la media es 51 y la desviación estándar es de 6. Al sustituir con las cifras los símbolos en la fórmula anterior se obtiene una puntuación -z para cada prueba:

$Z_1 = 72 -78/12 = -.0.50$

$Z_2 = 48 - 51 / 6 = -0.50$

Ambas puntuaciones estándar pertenecen a la distribución -z, donde la media es por definición igual a cero y la desviación estándar igual a 1, y por lo tanto pueden compararse directamente. En este ejemplo resulta evidente que las calificaciones obtenidas son equivalentes. El comparar este alumno con sus compañeros se encuentra que su ubicación respecto al grupo es la misma tanto en una como en la otra prueba aunque el valor bruto de la calificación es diferente.

Cuando tratamos de dibujar una gráfica que ilustre las frecuencias esperadas de todas las posibles puntuaciones z encontramos que las puntuaciones z que estén cerca de cero tendrán una expectativa de ocurrencia más frecuente que otros valores de las mismas y cuanto más alejada se encuentre el cero una puntuación -z cabe esperarse una menor frecuencia de presentación. Esto conduce a lo que conocemos como curva normal.

## La curva normal

Las distribuciones que ocurren de manera natural se asemejan a la curva normal, por lo que este modelo ha resultado de mucha utilidad.

La curva normal es una distribución simétrica de mediciones, con el mismo número de casos a distancias específicas tanto por debajo como por encima de la media. Su media es el punto debajo del cual cae exactamente el 50 por ciento de los casos y sobre el que se encuentra el otro 50%. En estas distribuciones la mediana y la moda son valores idénticos y coinciden con la media. En una curva normal la mayoría de los casos se concentran cerca de la media. Su frecuencia disminuye al alejarse de ella en cualquier dirección. En una distribución normal aproximadamente un 34 % de los casos se localiza entre la media y una desviación estándar por encima o por debajo de ella. El área comprendida entre las dos primeras desviaciones estándar situadas a ambos lados de la media de la distribución, contiene cerca de un 14% de los casos. Cerca de un 2% se encuentra entre dos segundas desviaciones estándar y únicamente 0.1% se agrupa por encima o debajo de las tres terceras desviaciones estándar.

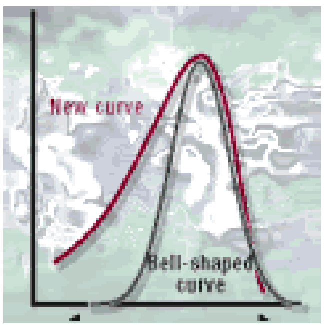
De Moivre inventó la curva normal para su uso particular, que era el de dar una solución fácil y aproximada a las aplicaciones de la teoría de las probabilidades. Nunca imaginó que tendría aplicaciones prácticas en todas las áreas de la ciencia moderna y contemporánea y, de hecho, la amplísima aplicación y difusión de la distribución normal son sorprendentes. Esta juega un papel importante en la estadística descriptiva como en la inferencial.

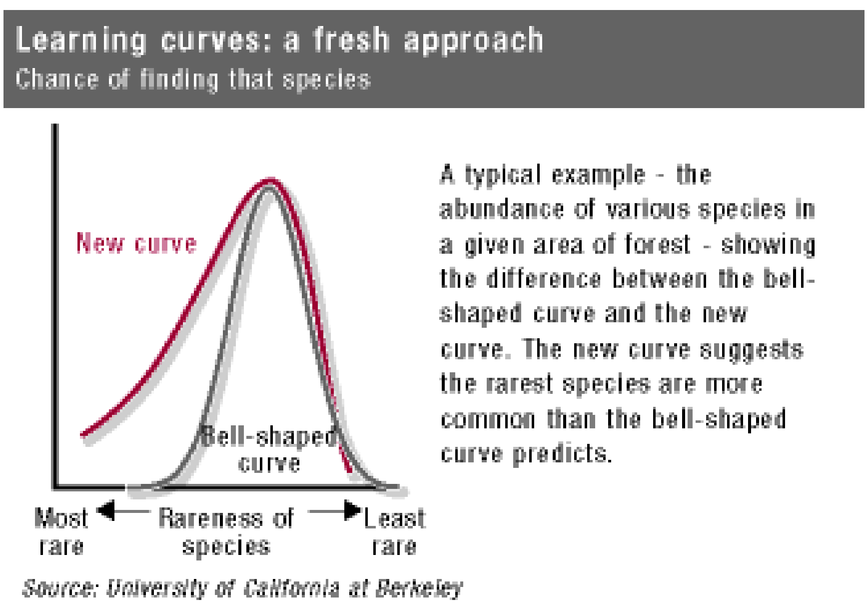
Es común dudar si necesariamente existe una relación entre la distribución normal -descripción idealizada de algunas distribuciones de frecuencias- y cualquier dato recogido. La curva normal es una creación matemática y constituye una descripción bastante adecuada de los polígonos de frecuencias de medidas de diversas variables. Nunca a podido recogerse un conjunto de puntuaciones distribuidas normalmente. Pero mucho se gana aceptando el pequeño error existente, y afirmando eventualmente que las puntuaciones de una variable están "normalmente distribuidas".

Existe en la internet algunos lugares donde podemos observar cómo opera esta teoría. Por ejemplo el teorema del límte central. Si desea puede accesar el siguiente sitio [The normal approximation to the binomial distribution] . Alli puede encontrar una pequeña gráfica que permite ver cómo la curva asume diferentes formas y posiciones según el tamaño de los casos (N) y según la probabilidad de ocurrrencia. Cuando tenemos una probabilidad .5 la figura de la curva es la de una distribución normal.

**Posmodernismo, la teoría del caos y a nueva curva normal**

Con el advenimiento del posmodernismo, la búsqueda de respuestas a los fenómenos inciertos cada día más comunes, ha traído consigo el surgimiento de nuevas ideas respecto a la probabilidad de eventos que, aunque muy extraños, se presentan con mucha más regularidad de lo que la curva normal puede representar. En la universidad de Cornell y en Berkeley asi como investigadores ingleses y franceses han propuesto una nueva curva la cual parece tener un sesgo negativo dando lugar a una mayor área en comparación con la curva normal en dirección a la sección a la izquierda de la media. La ocurrencia de turbulencias áreas, la presencia de especies extrañas, la ocurrencia de fenómenos atmosféricos como huracanes, tornados así como la ocurrencia de terremotos pueden justificar la revisión del concepto moderno de la curva normal. Adjunto una transcripción de la nota periodística publicada el respecto en The Financial Time del 3 de Setiembre de 1999.




---

A continuación se transcribe el artículo publicado en Financial Times el 3 de Setiembre de 1999 en la sección de Ciencia bajo el título La nueva curva hace predecible la vida.
Escrito por Michal Peel

SCIENCE: New curve makes life

predictable
By Michael Peel

Albert Einstein's dictum that God "does not play dice" looks like turning from a great man's aside into a universal truth.
Scientists from Britain, France and the US have discovered a mathematical curve that seems to explain seemingly random events, such as aircraft turbulence and forest fires. Their findings challenge the pre-eminence of the bell-shaped curve,
the standard device used to forecast probabilities in areas as diverse as natural disasters and children's exam results.
The new curve is broader and more gently sloping, suggesting that the rarest events occur more often than predicted by the bell-shaped curve.
The breakthrough could have far-reaching consequences in areas such as engineering, insurance and ecology which rely on forecasts of probabilities that specific events will occur.
Donald Turcotte, professor of geological sciences at Cornell University, New York, said he discovered the curve after plotting graphs of the severity of floods in the US. His study suggested the worst incidents occurred more often than indicated by official predictions, which were based on the bell-shaped curve.
The idea of a new universal curve crystallised after quirks of fate brought together scientists working on various natural phenomena including avalanches, earthquakes and the abundance of species in eco-systems.
Their findings suggest that industrialists and conservationists alike may have to review some of the key assumptions underpinning their work.

Chaos theory link
The discovery draws on chaos theory, a branch of maths that revolves around identifying patterns in apparently random sequences of events.
Chaos theory has been used, with varying degrees of success, to account for phenomena from the galactic clustering of stars to the rise and fall of civilisations.
The British, French and US scientists sought to reconcile their findings in the laboratory with the often wild-sounding predictions of chaos theory.
Their work shows that a central concept of chaos theory, known as self-similarity, can be used to connect the results of studies in otherwise unrelated fields, such as turbulence and environmental science.
Dr Steve Bramwell of University College, London, whose research on magnetism helped yield the new curve, said the link he had forged between chaos theory and experimental rigour was "something you can't escape".
Einstein, who sought predictability in the real world and argued that quantum mechanics was an inadequate universal theory, would have approved.

Genetics may boost brain power
Obesity gene discovery seen as 'dramatic departure'
Redrawing the curve reveals new pattern of events

Redrawing the curve reveals new pattern of events
Discovery of a universal law linking seemingly random data came about through a remarkable pair of coincidences, says

Michael Peel

Donald Turcotte recalls the hostile reaction he received when he suggested there might be a universal law linking patterns of mineral deposits, floods and landslides. He says: "I went to a conference in Italy and some distinguished physicists said: 'This can't be good science - it's too easy'."

It was a very human response to an apparently nonsensical notion. It defied intuition that there could be a simple connection between such diverse natural phenomena.

Yet Prof Turcotte and a number of other credible scientists contend not only that such a link exists, but that it extends into other fields. In short, they claim to have discovered a mathematical relationship that helps account for a range of seemingly random data, from avalanches to the spread of species in forests.

It is a discovery that promises to be of great practical importance as well as enormous theoretical interest. It could open up new ways of thinking in many fields that deal with apparently unpredictable events, from weather forecasting to stock market analysis.

As in all the best scientific narratives, the story of the discovery is almost as arresting as the breakthrough itself. While the concepts underpinning the new theory have been around for some time, the idea of a universal law was born only after an extraordinary pair of coincidences brought its architects together.

The tale began last year in London, although it could equally well have started in Lyons, California or New York. The location was the University College laboratory of Steve Bramwell, a chemist who had for several years been investigating how magnets lost their magnetic properties when heated.

Working with Peter Holdsworth of the Ecole Normale Supérieure in Lyons, France, Dr Bramwell was looking at what happened at the critical temperature when magnets ceased to be magnetic. The researchers were able to plot a graph showing how the overall magnetisation of the magnet began to fluctuate in a distinctive but random way, with the occasional large movement.

Back in Lyons, Prof Holdsworth visited the laboratory of a colleague, Jean-François Pinton, who was doing research on the type of turbulent flows that buffet aircraft in mid-flight. It was the cue for Prof Holdsworth to make an astonishing discovery: there, on a desk, was a graph that looked identical to the chart he and Dr Bramwell had drawn up from the magnetism research.

Working in an apparently unrelated field, Dr Pinton had deduced identical behaviour to that observed by the other two researchers. "It turns out that it [magnetism] behaves in exactly the same way as the turbulence problem," says Dr Bramwell.

Late last year, the scene shifted to London again, where John Harte, a professor of environmental science at the University of California at Berkeley, was giving a lecture at Imperial College.

As Prof Harte talked about his work on the distribution of species in ecosystems, a member of the audience started to become very excited. Was Prof Harte aware, he asked, that the characteristic curve he was using to describe species abundance bore a striking resemblance to that deduced by Dr Bramwell in his work on magnetism?

A comparison revealed that the two curves were the same. "It was immediately obvious that we were on to the same thing," says Prof Hate. "The fact that somebody at that talk knew both his work and my work bridged the gap between us."

By now it was becoming clear that the various groups of researchers had worked out what Dr Bramwell described as some kind of "characteristic universal curve". The reason the systems behaved in the same fashion, they agreed, was that they shared a feature known as self-similarity.

If an object is self-similar, it means it looks the same when viewed from far away or nearby. One example is the cauliflower: just as it is made up of individual florets, so each floret is made up of still smaller florets. If you were given a picture with no sense of scale, you could not tell if you were looking at a whole cauliflower or just one floret.

In the same way, the distribution of species in 1 sq km of forest ought to be similar to that found in one square metre of the same habitat. Likewise, a turbulent or magnetic system is made up of a series of miniature systems, each of which is made up of a set of yet smaller arrays.

The concept of self-similarity forms the basis of the pioneering work done in the 1970s on chaos theory, a branch of physics that revolves around identifying patterns in apparently unpredictable sequences of events.

The problem for chaos theorists has been that they are viewed with scepticism by some scientists, who see their work as flashy and crowd-pleasing. This image has been re-inforced by the adoption of some of the ideas of chaos theory in popular culture, including appearances in films such as Jurassic Park.

What is important and exciting about the latest work is the way researchers have married chaos theory with hard experimental science across a range of disciplines. "When you look for [self-similarity] in a very broad class of systems you will probably find it," says Henrik Jensen, a reader in mathematical physics at Imperial College London. "The reason people haven't seen it is they haven't looked at it from that angle or perspective."

The emergence of a new universal curve promises to be a dramatic development in a world that relies on the famous bell-shaped curve, or Gaussian distribution, for so many of its assumptions.

The Gaussian model is all pervasive, and it is used to make statistical predictions about patterns ranging from the number of errors in pages of typescript to the distribution of heights within populations.

Dr Bramwell and the other researchers do not claim that their model will replace the Gaussian distribution in every case, but that for certain systems it will prove more appropriate. The new curve tails off less steeply than its bell-shaped counterpart, suggesting that the rarest events will occur more often than predicted by the Gaussian model.

This has obvious implications for insurers and anybody else concerned with predicting unlikely events, such as natural disasters.

Prof Turcotte, who holds the chair in geological sciences at New York State's Cornell University, has already used the work to explain incidences of avalanches, forest fires and earthquakes.

He says the higher-than-expected occurrences of hurricanes and flooding in the last decade show that insurance companies are making their predictions using an incorrect Gaussian model. "[But] they would not accept what I told you," he says. "They would say global warming makes floods occur more often than they have in the past."

Such scepticism is understandable. It seems to defy reason that one simple rule could explain such a panoply of events, regardless of variations in geography, geology and man-made efforts at disaster prevention.

Yet, according to the researchers, and the papers they have published in respected scientific journals, the power of self-similarity accounts for all these things and more. "It's very exciting," says Prof Harte. "I think we are stumbling along towards finding maybe a universal distribution of phenomena which connects a lot of different components of the natural world."

For those who continue to doubt that it could all be so simple, Prof Turcotte has a suitably direct response. "People say: 'You can't do it because it's too complicated a problem'," he says. "We say: 'Just look at the data'."

New curve makes life predictable